ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 10/6/2019

ΘΕΜΑ Α

Α1.
α) Βλέπε σχολικό σελ. 15
β) Βλέπε σχολικό σελ. 35
γ) Βλέπε σχολικό σελ. 35-36

Α2.
Βλέπε σχολικό σελ. 142

Α3.
Βλέπε σχολικό σελ. 135

Α4.
α) Λάθος
Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{αν } x\in(-\infty,0) \\ 1 & x\in(0,+\infty) \end{cases}$ ισχύει ότι

$f'(x)=0$ για κάθε $x\in A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,αλλά δεν είναι σταθερή στο A .

β) Λάθος
Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{αν } x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \\ 0 & x=0 \end{cases}$

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1\neq 0=f(0)$

Α5.

$$\int_a^\delta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\delta f(x)dx=2+(-1)+3=4,$$.

Άρα το Σωστό είναι το (γ).

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Επειδή η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ισχύει ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda) = 2 \Rightarrow 0+\lambda = 2$ άρα $\lambda = 2$

B2.

Έχουμε $f(x) = e^{-x}+2$ με $x \in \mathbb{R}$

$f(x)-x=0 \Leftrightarrow e^{-x}+2-x=0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^{-x}+2-x$ με $x\in\mathbb{R}$ με $g'(x) = -e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

άρα $g \searrow \ \mathbb{R}$

Έχουμε g συνεχής στο $\left[2,3\right]$ ως πράξεις-σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

$$g(2) = e^{-2}+2-2 = \frac{1}{e^2} > 0$$

$$g(3) = e^{-3}+2-3 = \frac{1}{e^3}-1 = \frac{1-e^3}{e^3} < 0$$

άρα $g(2)\cdot g(3) < 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,3)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0$

άρα x_0 μοναδική ρίζα της $g(x)=0$ στο $\mathbb{R}$

B3.

Έχουμε $f(x) = e^{-x}+2$ με $x\in\mathbb{R}$

$f'(x) = (e^{-x}+2)' = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

άρα $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα f "$1-1$", άρα η f αντιστρέφεται.

Βρίσκουμε: <u>το σύνολο τιμών της</u> f

Επειδή $f \searrow$ και συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f\Big(\mathbb{R} \qquad \underset{\to+\infty}{f(x)}, \lim_{x\to-\infty} f(x)\Big)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+2\right) = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{-x}+2) = +\infty$$

άρα $f\big(\mathbb{R} \qquad \infty\big)$ άρα $A_{f^{-1}} = \left(2,+\infty\right)$

Βρίσκουμε τον τύπο της f^{-1}.

Θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x.

$$y = e^{-x}+2 \Leftrightarrow e^{-x} = y-2 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = y-2 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{y-2} \overset{y>2}{\Leftrightarrow} \ln e^x = \ln\frac{1}{y-2} \Leftrightarrow x = \ln 1 - \ln(y-2)$$

$\Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$ άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$ με $x\in\left(2,+\infty\right)$

B4.

Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to 2} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right]$

Θέτουμε u = x – 2

$\lim\limits_{x\to 2^+} u = \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2) = 0$

άρα $\lim\limits_{x\to 2} f^{-1}(x) = \lim\limits_{u\to 0}(-\ln u) = +\infty$

άρα η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf^{-1}.

Για την f με τύπο $f(x) = e^{-x} + 2$ με $x \in \mathbb{R}$

έχουμε: $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$

$f''(x) = e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Για την f^{-1} με τύπο $f^{-1}(x) = -\ln(x-2), x > 2$,

έχουμε: $\left(f^{-1}\right)'(x) = -\dfrac{1}{x-2} < 0$ στο $(2,+\infty)$

άρα $f \downarrow$ στο $(2,+\infty)$

$\left(f^{-1}\right)''(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0$ στο $(2,+\infty)$

άρα f κυρτή στο $(2,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}+2}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\left(-e^{-x}\right) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

άρα δεν έχει η C_f ασύμπτωση στο $-\infty$

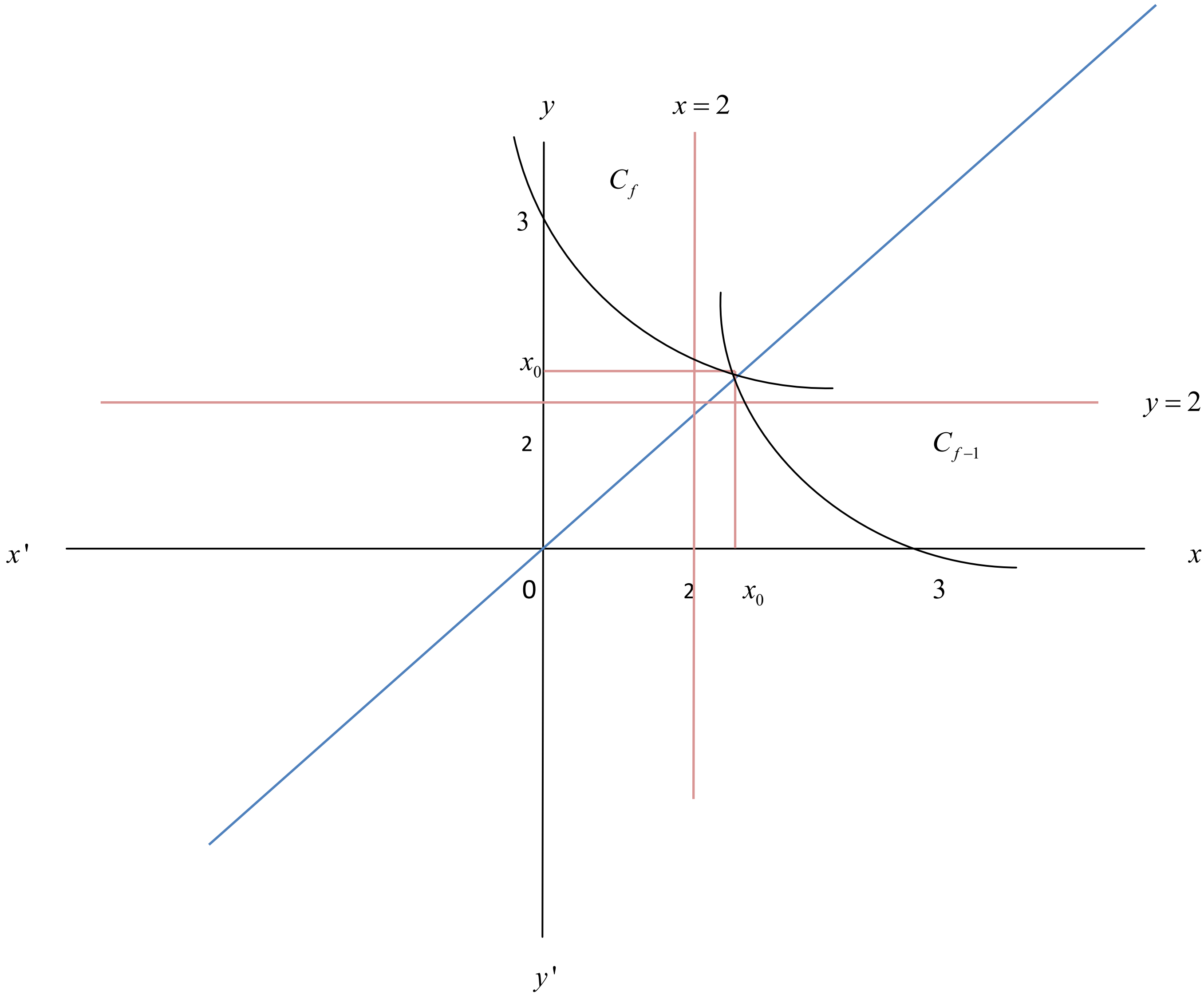
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln(x-2)}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x-2}\right) = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f^{-1}(x) - 0x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\ln(x-2)\right) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

άρα δεν έχει η $C_{f^{-1}}$ ασύμπτωτη στο $+\infty$

Έχουμε $f(x_0) = x_0 \Rightarrow f^{-1}\left(f(x_0)\right) = f^{-1}(x_0)$ άρα

$x_0 = f^{-1}(x_0)$ άρα οι C_f και C_f^{-1} τέμνονται στο $M(x_0, x_o)$ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$



ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε $f(x)\begin{cases} x^2+a, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Γ1.

Επειδή f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=1$

άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ άρα

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+a) = \lim\limits_{x\to 1^-}(e^{x-1}+\beta x) = f(1)$ άρα

$1+\alpha = 1+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

Επειδή f παραγωγίσιμη στο 1, ισχύει ότι:

$f'(1) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ άρα

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(e^{x-1}+\beta x)-(1+\beta)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2+a)-(1+a)}{x-1}\ \text{άρα}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1+\beta(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\quad \text{άρα}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\beta\right)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2 \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}e^{x-1}=1$

άρα (1) $\Rightarrow\ 1+\beta=2\Leftrightarrow\beta=1$

άρα α=1

άρα $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1\\ e^{x-1}+x, & x<1\end{cases}$

Γ2.

Έχουμε $f'(x)=\begin{cases}(x^2+1)', & x>1\\ (e^{x-1}+x)', & x<1\end{cases}\quad\Rightarrow$

$f'(x)=\begin{cases}2x>0, & x>1\\ e^{x-1}+1>0, & x<1\end{cases}$

άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

και f συνεχής στο 1, άρα $f\nearrow$ στο $\mathbb{R}$

Επειδή $f\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ και συνεχής ισχύει ότι:

$f(\mathbb{R}$ $\qquad f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$$

άρα $f(\mathbb{R}$ $\qquad\mathbb{R}$

Γ3.

i) Έχουμε ότι $f(0)=e^{0-1}+0=\dfrac{1}{e}>0$

άρα το σύνολο τιμών της f στο $(-\infty,0]$

επειδή είναι συνεχής και $\nearrow$ είναι

$$A_1=f\left((-\infty,0]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(0)\right]=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$$

Το $0 \in A$, άρα υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$ μοναδικό στο $\mathbb{R}$ γιατί $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$, ώστε $f(x_0) = 0$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - x_0 f(x)$ με $x \in [x_0, +\infty)$

Έχουμε $g(x_0) = f^2(x_0) - x_0 f(x_0) = 0$

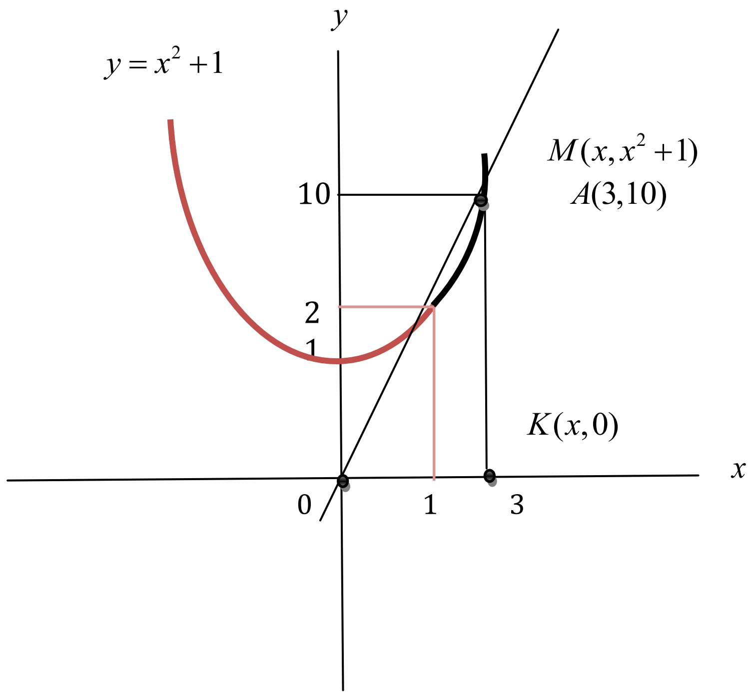
$$g'(x) = (f^2(x) - x_0 f(x))' = 2f(x) \cdot f'(x) - x_0 f'(x) \Rightarrow$$
$$g'(x) = f'(x)(2f(x) - x_0)$$

Έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_{0,} +\infty)$

Αν $x > x_0 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow 2f(x) > 0$
και $x_0 < 0 \Rightarrow -x_0 > 0$
άρα $2f(x) - x_0 > 0$ άρα $g'(x) > 0$ στο $(x_{0,} +\infty)$
και επειδή g συνεχής στο $[x_{0,} +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, έχουμε ότι

$g \nearrow$ στο $[x_0, +\infty)$
Αν $x > x_0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) \Rightarrow g(x) > 0$
άρα η $g(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Γ4.



Έχουμε ότι: $x(t_0) = 3, \psi(t_0) = 10, x'(t_0) = 2\dfrac{\mu}{\sec}$

Έχουμε (ΜΟΚ) $=\dfrac{\beta\cdot\upsilon}{2}=\dfrac{x(t)\cdot(x^2(t)+1)}{2}=\dfrac{x^3(t)+x(t)}{2}$

Αν $z(t)=(MOK)$ τότε

$$z(t)=\frac{x^3(t)+x(t)}{2}$$

$$z'(t)=\frac{3x^2(t)x'(t)+x'(t)}{2}$$

Για $t=t_0$, $z'(t_0)=\dfrac{3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)}{2}=\dfrac{3\cdot 3^2\cdot 2+2}{2}=\dfrac{2(3^3+1)}{2}=28\dfrac{(\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma)^2}{\sec}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Επειδή το $A\in Cf$ ισχύει ότι:

$$f(1)=1\Leftrightarrow(1-1)\ln\left(1^2-2\cdot1+2\right)+\alpha\cdot1+\beta=1\Leftrightarrow$$

$\boxed{\alpha+\beta=1}$ (1)

Επειδή η $(\varepsilon)\cdot\psi=-x+2$ εφάπτεται της Cf στο $\mathrm{A}(1,1)$ ισχύει ότι $\lambda\varepsilon=f'(1)=-1$ (2)

$$f'(x)=\left[(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)+\alpha x+\beta\right]'=$$

$$(x-1)'\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{\left(x^2-2x+2\right)'}{x^2-2x+2}+\alpha(x)'+(\beta)'=$$

$=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha$ άρα η (2)$\Leftrightarrow$

$\ln\left(1^2-2\cdot1+2\right)+(1-1)\dfrac{2\cdot1-2}{1^2-2\cdot1+2}+\alpha=-1\Leftrightarrow\boxed{\alpha=-1}$

Η (1) $\Leftrightarrow-1+\beta=1\Leftrightarrow\boxed{\beta=2}$

άρα $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$ με $x\in\mathbb{R}$

και $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1=$

$$=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2x^2-4x+2-x^2+2x-2}{x^2-2x+2}$$

$=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$ άρα

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$$

Δ2.

Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς στο [1,2]

$$f(x)-(-x+2)=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2+x-2$$
$$=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)$$

Έχουμε:

$$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+2 \geq 1 \overset{y=\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln\left(x^2-2x+2\right) \geq \ln 1 \Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l}\ln\left(x^2-2x+2\right) \geq 0 \\ \text{και} \quad \text{x-1} \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right) \geq 0 \quad \text{στο} \quad [1,2]$$

άρα

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^2 (f(x)-(-x+2))dx=$$
$$=\int_1^2 (x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$$

Θέτουμε:

$$u=x^2-2x+2 \Rightarrow du=\left(x^2-2x+2\right)' dx \Rightarrow$$
$$du=2(x-1)dx \Rightarrow \frac{1}{2}du=(x-1)dx$$

αν x=1, τότε $u=1^2-2\cdot 1+2=1$

αν x=2, τότε $u=2^2-2\cdot 2+2=2$

άρα

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^2(\ln u)\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int_1^2 (u)'\ln u du=$$
$$=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u(\ln u)' du=$$
$$=\frac{1}{2}(2\ln 2-1\ln 1)-\frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}2ln2-\frac{1}{2}\int_1^2 1du=$$
$$=\ln 2-\frac{1}{2}[u]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}(2-1)=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\tau\mu$$

Δ3.

i) Έχουμε:

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}=$$
$$=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x+2}-\frac{2}{x^2-2x+2}$$
$$=\ln\left(x^2-2x+2\right)+1-\frac{2}{x^2-2x+2}, \quad x\in\mathbb{R}$$

άρα:

$$f''(x)=\left(\ln\left(x^2-2x+2\right)+1-\frac{2}{x^2-2x+2}\right)'=$$

$$=\frac{\left(x^2-2x+2\right)'}{x^2-2x+2}+0+\frac{2\left(x^2-2x+2\right)'}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$$

$$=\frac{2x-2}{\left(x^2-2x+2\right)}+\frac{2\left(2x-2\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$$

$$=2\left(x-1\right)\left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\right)$$

Άρα $f''(x)=2\left(x-1\right)\left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\right)$

Έχουμε $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{(x^2-2x+2)^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow x=1$

άρα $f''(x)>0\Leftrightarrow x>1$

$f''(x)<0\Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

O.E

$f'(1)=1$

Στο $x=1$ η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f'(1)=-1$

άρα $f'(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) Έχουμε : $\lambda+\frac{1}{2}>\lambda$

Έχουμε f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$

f παραγωγίσιμη στο $(\lambda,\lambda+\frac{1}{2})$

άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$

ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{(\lambda+\frac{1}{2})-\lambda}$

άρα $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$

Έχουμε: $f'(\xi)\geq-1\Leftrightarrow \dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq-1\Leftrightarrow$

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ4.

$g(x)=-x^3-x+2,\ \lambda\in\mathbb{R}$

$g'(x)=-3x^2-1\leq-1$ με $g'(0)=-1$

αν $x\neq0\quad x^2>0\Leftrightarrow-3x^2<0\Leftrightarrow-3x^2-1<-1$

άρα $g'(\chi)<-1$

Η εφαπτομένη της Cg στο B(0,2) έχει εξίσωση $(\varepsilon_1):\psi-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow$

$(\varepsilon_1):\psi-x+2$

Η εφαπτομένη της Cf στο A(1,1) έχει εξίσωση: $(\varepsilon_1):\psi-x+2$

άρα η (ε) ταυτίζεται με την (ε_1)

άρα η (ε) είναι μια κοινή εφαπτομένη.

Δεν υπάρχει άλλη κοινή εφαπτομένη, γιατί αν $x \neq 0$: $g'(x) < -1$ και για $x \neq 1$: $f'(x) > -1$
άρα ισχύει $g'(x) < -1 < f'(x)$

άρα η ισότητα $g'(x_1) = f'(x_2)$ ισχύει όταν $g'(x_1) = -1 = f'(x_2)$ και $x_1 = 0$, $x_2 = 1$